



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



Barem de notare și evaluare
Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală - 17 februarie 2024
Clasa a XII-a

Subiectul 1	
a) Operația „ $*$ ” este lege de compoziție pe G , asociativă, comutativă, cu elementul neutru $e = 6$,	1p
$\forall x \in G, \exists x' = 5 + \frac{1}{x-5} \in G$, astfel încât $x * x' = x' * x = 6$.	1p
$\forall x \in G, \exists x' = 5 + \frac{1}{x-5} \in G$, astfel încât $x * x' = x' * x = 6$.	1p
Fie $q \in Q, q > 5$. Atunci $q - 5 \in Q, q - 5 > 0$, prin urmare există numerele naturale nenule m, n , prime între ele, astfel încât	
$q = 5 + \frac{m}{n}.$	2p
$q = 5 + (m + 5 - 5) \cdot \left(\frac{1}{n} + 5 - 5\right) =$	
$= (m + 5) * \left(\frac{1}{n + 5 - 5} + 5\right) = (m + 5) * (n + 5)'$	1p
Cum m, n sunt numere naturale nenule, rezultă că $m + 5, n + 5$ sunt numere naturale mai mari decât 5, deci conținute de H . Conform criteriului subgrupului, q aparține lui H .	1p
TOTAL	7p
Subiectul 2	
$(xe^x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in R$ implică $4xe^x - 2 \leq 2x^2e^{2x}, \forall x \in R$.	2p
Atunci $\frac{4xe^x - 2}{(x+1)^2} \leq \frac{2x^2e^{2x}}{(x+1)^2}, \forall x \in [0,1]$, deci $\int_0^1 \frac{4xe^x - 2}{(x+1)^2} dx \leq 2 \int_0^1 \frac{x^2e^{2x}}{(x+1)^2} dx. (1)$	1p
$\int_0^1 \frac{x^2e^{2x}}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{-1}{x+1}\right)' x^2e^{2x} dx = -\frac{e^2}{2} + \int_0^1 2xe^{2x} dx =$	2p
$= -\frac{e^2}{2} + \int_0^1 x(e^{2x})' dx = -\frac{e^2}{2} + e^2 - \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2}. (2)$	
Din relațiile (1) și (2) rezultă concluzia.	2p
TOTAL	7p

Subiectul 3	
$H \cap K$ subgrup al lui G .	1p
Un grup nu poate fi scris ca reuniunea a două subgrupuri proprii ale sale, astfel mulțimea $G \setminus (H \cup K)$ este nevidă.	
Fie $x \in G \setminus (H \cup K)$, atunci $ax \in G \setminus (H \cup K)$, pentru orice $a \in H \cap K$. (1)	1p
În caz contrar, avem $ax = y \in (H \cup K)$, deci $x = a^{-1}y$, iar $a^{-1} \in H \cap K$ și $y \in (H \cup K)$ conduc la $x = a^{-1}y \in (H \cup K)$, ceea ce reprezintă o contradicție.	1p
Din (1) și din ipoteză, avem că $(ax)^2 = e = x^2$, pentru orice $a \in H \cap K$, de unde obținem că $axa = x$, adică $ax = xa^{-1}$, pentru orice $a \in H \cap K$. (2)	2p
Fie $a, b \in H \cap K$ oarecare. Atunci $a^{-1}, ab \in H \cap K$, iar prin aplicarea succesivă a relației (2) obținem $ab = abx^2 = ((ab)x)x = x(ab)^{-1}x = (xb^{-1})(a^{-1}x) = (bx)(xa) = bx^2a = ba$.	2p
TOTAL	7p
Subiectul 4	
„ \Rightarrow ” Știm că f admite primitive, prin urmare f are proprietatea lui Darboux.	1p
Cum f are proprietatea lui Darboux și f este injectivă obținem că f este strict monotonă.	1p
O funcție monotonă ce are proprietatea lui Darboux este continuă.	1p
Fie $h: R \rightarrow R, h(t) = t + \sin t$, continuă pe R .	
Atunci $g = h \circ f$ este continuă pe R , astfel g admite primitive.	1p
„ \Leftarrow ” Știm că g admite primitive, prin urmare g are proprietatea lui Darboux.	
Cum h e continuă și inversabilă, avem h^{-1} continuă.	1p
$f = h^{-1} \circ g$. Funcția h^{-1} continuă, prin urmare h^{-1} are proprietatea lui Darboux și, cum funcția g are proprietatea lui Darboux, obținem că f are proprietatea lui Darboux.	1p
Cum f este și injectivă, rezultă că f este strict monotonă.	
O funcție monotonă ce are proprietatea lui Darboux este continuă, prin urmare admite primitive.	1p
TOTAL	7p

